E.N.S. FONTENAY- SAINT CLOUD

Option Mathématiques

Math. Appliquées

Durée : 3 heures

Soit X le simplexe de $\mathbb{R}^m$ défini par

$$X = \{ x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m);\ x_i \geqslant 0,\ \sum_{i=0}^{m} x_i = 1 \}$$

et, pour i dans $I = \{ 1, \ldots, m \}$, e_i le $i^{ième}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$. On définit de même le simplexe Y de $\mathbb{R}^n$ et f_j pour j dans $J = \{ 1, \ldots, n \}$.

A est une matrice $m \times n$ réelle de terme générique a_{ij}.

Pour (x, y) dans $X \times Y$ on introduit :

$$x A y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j$$

$$u(x) = \inf_{y \in Y} x A y$$

$$w(y) = \sup_{x \in X} x A y.$$

A

1° Montrer que : $u(x) = \inf_{j \in J} x A f_j$

2° On pose $u = \sup_{x \in X} u(x)$, $w = \inf_{y \in Y} w(y)$.

Montrer que : $u \leqslant w$.

3° On note $\overline{X} = \{ x \in X ;\ u(x) = u \}$ et $\overline{Y} = \{ y \in Y ;\ w(y) = w \}$.

Montrer que $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont des compacts convexes non vides.

4° On veut établir l'égalité $u = w$ (*).

Pour cela on raisonne par récurrence sur la taille de la matrice en supposant la condition (*) vraie pour toutes les sous-matrices strictes de A. (Constater (*) pour $m = n = 1$.)

Supposons donc $u < w$. Soient x_0 et y_0 tels que $u(x_0) = u$, $w(y_0) = w$.

Remarquer alors que :

soit $\quad x_0 A y_0 < w \quad$ (**)

soit $\quad x_0 A y_0 > u \quad$ (***)

5° On suppose dans cette question que l'inégalité (**) est satisfaite. Montrer qu'il existe k dans I et $s > 0$ tels que :

$e_k A y_0 = w - s$ et que l'on peut trouver (x_1, y_1) dans $X \times Y$ vérifiant : $\inf_{j \in J} x_1 A f_j = \sup_{\substack{i \in I \\ i \neq k}} e_i A y_1$; on note v_1 cette quantité commune.

Pour r dans $]0, 1[$ on définit :

$$x(r) = (1 - r) x_0 + r x_1$$

$$y(r) = (1 - r) y_0 + r y_1 .$$

Vérifier que $(x(r), y(r))$ est dans $X \times Y$ et prouver que :

$$w(y(r)) \leqslant \sup \{ (1 - r) w + r v_1,\ (1 - r)(w - s) + r e_k A y_1 \} .$$

Montrer alors que pour r assez petit on a :

$$w(y(r)) - u(x(r)) < w - u .$$

6° En déduire que $u = w$.

B

On appelle valeur de A et on note $v(A)$ la quantité commune :

$$v(A) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} x A y = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} x A y$$

1° Soient $(\bar{x}, \bar{y})$ dans $\overline{X} \times \overline{Y}$. Montrer que :

$$x A \bar{y} \leqslant \bar{x} A \bar{y} \leqslant \bar{x} A y \quad \text{pour tout } (x, y) \text{ dans } X \times Y.$$

2° Réciproquement, soient $(\tilde{x}, \tilde{y})$ dans $X \times Y$ tels que :

$$x A \tilde{y} \leqslant \tilde{x} A \tilde{y} \leqslant \tilde{x} A y \text{ pour tout } (x, y) \text{ dans } X \times Y.$$

Montrer que $(\tilde{x}, \tilde{y})$ est dans $\overline{X} \times \overline{Y}$.

3° Établir les points suivants :

— S'il existe i et k dans I tels que :

$e_i A f_j < e_k A f_j$ pour tout j dans J, alors $\bar{x}_i = 0$ pour tout $\bar{x}$ dans $\overline{X}$.

— S'il existe i et k dans I et $\bar{y}$ dans $\overline{Y}$ tels que :

$e_i A \bar{y} < e_k A \bar{y}$ alors $\bar{x}_i = 0$ pour tout $\bar{x}$ dans $\overline{X}$.

— S'il existe i dans I, x dans X et $\bar{y}$ dans $\overline{Y}$ tels que :

$e_i A \bar{y} < x A \bar{y}$ alors $\bar{x}_i = 0$ pour tout $\bar{x}$ dans $\overline{X}$.

1984

- P 25 -

4° Déterminer $v(A)$ pour la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où a est un paramètre réel.

5° Montrer que si B est obtenue à partir de A en permutant les lignes, ou les colonnes, ou les deux, alors $v(B) = v(A)$.

On note $\mathbf{1}$ la matrice $m \times n$ dont tous les éléments valent 1 et pour tout t réel, tA la matrice d'élément générique ta_{ij}.

Établir que :

$v(A + t\mathbf{1}) = v(A) + t$

$v(tA) = tv(A)$ si $t \geqslant 0$ et donner un contre-exemple pour $t < 0$.

En déduire que pour toutes matrices $m \times n$ A et B on a :

$|v(A) - v(B)| \leqslant \|A - B\|$ où $\|A\|$ dénote la norme $\max_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} |a_{ij}|$.

C

On note $e_i A$ (resp. $A f_j$) le vecteur défini dans $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m$) par la $i^{ème}$ ligne (resp. $j^{ème}$ colonne) de A.

Pour α dans $\mathbb{R}^n$ (resp. β dans $\mathbb{R}^m$) on introduit :

$$J(\alpha) = \{ j ; \alpha_j = \inf_{k \in J} \alpha_k \}, \quad I(\beta) = \{ i ; \beta_i = \sup_{k \in I} \beta_k \}.$$

On appelle suite admissible une suite de vecteurs $(\alpha(t), \beta(t) ; t \in \mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ satisfaisant :

(1) $$\inf_{j \in J} \alpha_j(0) = \sup_{i \in I} \beta_i(0)$$

(2) Pour tout t dans $\mathbb{N}$, il existe i dans $I(\beta(t))$ tel que :

$$\alpha(t+1) = \alpha(t) + e_i A$$

et il existe j dans $J(\alpha(t))$ tel que :

$$\beta(t+1) = \beta(t) + A f_j .$$

On remarquera que $(\alpha(t) - \alpha(0))/t$ est égal à xA pour un certain x dans X.

1° Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute suite admissible, il existe s dans $\mathbb{N}$ tel que $t \geqslant s$ entraîne :

$$\inf_{j \in J} \alpha_j(t)/t \leqslant v(A) + \varepsilon, \quad \sup_{i \in I} \beta_i(t)/t \geqslant v(A) - \varepsilon .$$

2° On considère une suite admissible et l'on dit que i (resp. j) est utile dans l'intervalle $(\underline{t}, \bar{t})$ de $\mathbb{N}$, s'il existe t avec $\underline{t} \leqslant t \leqslant \bar{t}$ et i dans $I(\beta(t))$, (resp. j dans $J(\alpha(t))$.

Montrer que si tous les j de J sont utiles dans l'intervalle $(s, s+t)$ de $\mathbb{N}$, on a :

$$\sup_{j \in J} \alpha_j(s+t) - \inf_{j \in J} \alpha_j(s+t) \leqslant 2t \|A\| .$$

On note $\mu(t) = \sup_{i \in I} \beta_i(t) - \inf_{j \in J} \alpha_j(t)$.

En déduire que si tous les i de I et tous les j de J sont utiles dans $(s, s+t)$:

$$\mu(s+t) \leqslant 4t \|A\| .$$

3° On veut établir l'assertion :

(§) Pour toute matrice A et tout $\varepsilon > 0$, il existe s dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$\mu(t) \leqslant \varepsilon t \text{ pour tout } t \geqslant s \text{ et toute suite admissible.}$$

La démonstration se fait encore par récurrence sur la dimension de A.

On suppose donc l'assertion (§) vraie pour toutes les sous-matrices strictes de A (le constater pour les matrices 1×1).

a. Montrer alors qu'il existe t' dans $\mathbb{N}$ tel que :

$\mu'(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} t$, pour tout $t \geqslant t'$, toute sous-matrice stricte A' de A et toute suite admissible (α', β') associée à A' où μ' est défini à partir de A', α', β' comme μ l'est à partir de A, α, β.

b. Montrer que si un i de I ou un j de J n'est pas utile dans $(s, s+t')$ on a :

$$\mu(s+t') \leqslant \mu(s) + \frac{\varepsilon}{2} t' .$$

(si i n'est pas utile, on construira à partir de (α, β) une suite admissible pour la matrice A privée de sa $i^{ème}$ ligne).

c. Soit maintenant pour $t \geqslant t'$, $t = qt' + r$ la division euclidienne de t par t'. Soit p le plus grand entier dans $\{1, \dots, q\}$ tel que tous les i et tous les j soient utiles dans l'intervalle $((p-1)t' + r, pt' + r)$ et $p = 0$ si cela n'a lieu pour aucun p.

Montrer en utilisant 3° *b.* :

$$\mu(t) \leqslant \mu(pt' + r) + \frac{\varepsilon}{2}(q - p)t'$$

puis, grâce à 2°, en séparant les cas $p = 0$, $p \geqslant 1$:

$$\mu(t) \leqslant 4 \|A\| t' + \frac{\varepsilon}{2} t .$$

d. En déduire (§).

4° Montrer enfin que pour toute suite admissible :

$$\lim_{t \to \infty} (\sup_{i \in I} \beta_i(t)/t) = \lim_{t \to \infty} (\inf_{j \in J} \alpha_j(t)/t) = v(A).$$